ගණිත අභ්‍යුහනය

නිඛිල ප්‍රතිඵලයක්, (+) නිඛිල සඳහා අගයන් සඳහා සත්‍ය බව ඔප්පු කිරීමට භාවිතයි. මේ සඳහා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතා කරයි.

පියවර

① $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය ඔප්පු කිරීම

② $n=p$ විට [$p \in \mathbb{Z}^+$ වනවිට] ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කිරීම

③ $n=p+1$ විට, ප්‍රතිඵලය ඔප්පු කිරීම

④ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු (+) නිඛිල සඳහා ප්‍රතිඵලය ඔප්පු වේ.

ගණිත අභ්‍යුහනය

1. සාමාන්‍ය ගැටලු
2. බෙදීම් ආශ්‍රිත ගැටලු
3. ශ්‍රේණි ආශ්‍රිත ගැටලු
4. Σ ආශ්‍රිත ගැටලු
5. න්‍යාස ආශ්‍රිත ගැටලු
6. අසමානතා ආශ්‍රිත ගැටලු
7. අනුකලන ආශ්‍රිත ගැටලු
8. මිශ්‍ර ගැටලු

① සාමාන්‍ය ගැටලු

① n ධන නිඛිලයක් ($n \in \mathbb{Z}^+$) වනවිට; $\cos(\pi n) = (-1)^n$ බව පෙන්වන්න.

$n=1$ විට

LHS	RHS
$\cos(\pi \times 1)$	$(-1)^1$
-1	-1

$LHS = RHS$ ← අනිවාර්ය LHS = RHS බව ඔප්පු කිරීම $(-1)=(-1)$ ලිවිය යුතුයි

$\therefore n=1$ විට; ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n=p$ විට.

$(p \in \mathbb{Z}^+)$ $(p \geq 1)$ ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු.

$$\cos(\pi p) = (-1)^p \quad —①$$

$n=p+1$ විට $\{\cos((p+1)\pi) = (-1)^{p+1}$ බව$\}$

LHS

$\cos(\pi(p+1))$

$= \cos(\pi p + \pi)$

$= \cos \pi p \cos \pi + \underbrace{\sin \pi p \sin \pi}_{= 0}$

$= \cos \pi p \cos \pi$

$= (-1)^p \cos \pi$ [①න්]

$= (-1)^p \cdot (-1)$

$= (-1)^{p+1}$

$= RHS$

$\therefore n = p+1$ විටදී ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$\therefore n=1$ විට සත්‍ය කර ඇත. $n=p$ විට, සත්‍ය නම් $n=p+1$ විට සත්‍ය කර ඇත.

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

② බෙදීම් ආශ්‍රිත ගැටලු

Note

① K පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම්,
$4K$, 4න් බෙදේ
$5K$, 5න් බෙදේ

② $K = \frac{3}{p}$, $\frac{3+29}{3}$ ලෙස
මෙම සංඛ්‍යා නිඛිලමය නොවන නිසා එකතු කිරීම හෝ අඩු කිරීම සඳහා පූර්ණ සංඛ්‍යා වල ගුණාකාර නොවේ

③ ① අනුයාත නිඛිල 2ක ගුණිතය 2න් බෙදේ

① $\underbrace{n(n+1)}_{2K \text{ ආකාරයේ}}$ ② $\underbrace{(n+3)(n+4)}_{2K \text{ ආකාරයේ}}$

② අනුයාත නිඛිල 3ක ගුණිතය 3න් බෙදේ

① $\underbrace{n(n+1)(n+2)}_{3K \text{ ආකාරයේ}}$

② $\underbrace{(n+4)(n+5)(n+6)}_{3K \text{ ආකාරයේ}}$

① $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$6^n - 5n + 4$ යන්නෙහි 5න් බෙදෙනබව පෙන්වන්න

n=1 විට

~~LHS~~ $6^1 - 5\cdot 1 + 4$

$= 6 - 5 + 4$

$= 6 - 1$

$= 5$

මෙය 5න් බෙදේ

∴ n=1 විට ; ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ

n=p විට

ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු.

$6^p - 5p + 4 = 5k$ ආකාරයට — ①

n=p+1 විට

$6^{p+1} - 5(p+1) + 4$

$6^p \cdot 6 - 5p - 5 + 4$

(①න්)

$(5k + 5p - 4)6 - 5p - 5 + 4$

$30k + 30p - 24 - 5p - 1$

$30k + 25p - 25$

$5[\underbrace{6k + 5p - 5}_{k'}]$

$5k'$

∴ මෙය 5න් බෙදේ.

∴ n=p+1 විට; ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ

② $n \in \mathbb{Z}^+$, $5^n - 4^n - 1$

හතරෙහි ගුණාකාරයක් බව

$f(n) = 5^n - 4^n - 1$ ලෙස ගනිමු.

n=1 විට,

$f(1) = 5 - 4 - 1$

$= 0$

$= 4 \times 0$

∴ මෙය 4 ගුණාකාරයකි

n=p විට,

ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු.

$5^p - 4^p - 1 = 4k$ ආකාරයට

n=p+1 විට

$5^{(p+1)} - 4^{(p+1)} - 1$

$5^p \cdot 5 - 4^p \cdot 4 - 1$

$(4k + 1 + 4^p)5 - 4^p \cdot 4 - 1$

$20k + 5 + 5\cdot 4^p - 4^p \cdot 4 - 1$

$20k + 4 + 4^p$

$4(\underbrace{5k + 1 + 4^{(p-1)}}_{k_1})$

$4k_1$

∴ 4න් බෙදේ

∴ n=p+1 විට, ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ.

CamScanner

② $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා,
$n(n+1)$; 2න්
බෙදෙන බව පෙන්වන්න

$n = 1$ විට:

$1 \cdot 2$

2

$\therefore$ 2න් බෙදේ

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයි

$n = p$ විට:
ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය
කරමු.

$p(p+1) = 2k$ ප්‍රකාශනය

$n = (p+1)$ විට

$(p+1)(p+2)$

$\underbrace{p(p+1)}_{2k} + 2(p+1)$

$2k + 2(p+1)$

$2[k + p + 1]$

$2k_1$ ප්‍රකාශනය

$\therefore$ 2න් බෙදේ

$\therefore n = p+1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යය

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය
අනුව සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය
සත්‍ය වේ.

③ $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $2^{2n+1} - 9n^2$
$+ 3n - 2$ ප්‍රකාශනය
54න් බෙදෙන බව පෙන්වන්න

$n = 1$ විට:

$2^3 - 9 \cdot 1 + 3 - 2$

$8 - 9 + 1$

0

$54 \cdot 0$

$\therefore$ 54න් බෙදේ

$\therefore n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යයි

ගණිත අභ්‍යුහනය

$n = p$ විට

ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු.

$2^{(2p+1)} - 9 \cdot p^2 + 3p - 2 = 54k$ ප්‍රකාශනය — ①

$n = p+1$ විට

$2^{(2p+3)} - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$

$= \underbrace{2^{(2p+1)}} \cdot 4 - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$

$= (54k + 2 + 9 \cdot p^2 - 3p)4 - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$

$= 216k + 8 + 36p^2 - 12p - 9(p+1)^2 + 3(p+1) - 2$

~~$216k + 12p(3p - 1)$~~

$= 216k + \cancel{8} + 36p^2 - 12p - 9p^2 + 18p - \cancel{9} + 3p + \cancel{3} - \cancel{2}$

$= 216k + 27p^2 + 27p$

$= 216k + 27 \cdot \underbrace{p(p+1)}_{2k \text{ ප්‍රකාශනය}}$

$= 54 \cdot 4k + 27 \cdot 2k_1$

$= 54 \cdot 4k + 54k_1$

$= 54(4k + k_1)$

$= 54k_{11}$ ප්‍රකාශනය

$\therefore$ 54න් බෙදේ.

$\therefore n = p+1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යය

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව
සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය
සත්‍ය වේ.

*

① $n \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

නිඛිලයක් බව ඔප්පු කරන්න

n = 1 විට,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$

මෙය නිඛිලයකි

$\therefore$ n = 1 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

n = p විට, උපකල්පනය සත්‍ය බව සිතමු.

$$\frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{6} = K \text{ ආකාරයේ} \quad -①$$

n = p+1 විට

$$\frac{(p+1)^3}{3} + \frac{(p+1)^2}{2} + \frac{(p+1)}{6}$$

$$\frac{p^3+1+3p^2+3p}{3} + \frac{p^2+2p+1}{2} + \frac{p+1}{6}$$

$$\underbrace{\frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{6}}_{=K} + \frac{3p^2+3p+1}{3}$$

$$+ \frac{2p+1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$K + \frac{3p(p+1)+1}{3} + \frac{2p+1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$K + \frac{\cancel{3}p(p+1)}{\cancel{3}} + \frac{1}{3} + \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$K + \underbrace{(p^2+p+p+1)}_{=K'}$$

$$K + K'$$

මෙය නිඛිලයකි

$\therefore$ n = p+1 විට සත්‍ය වේ

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය

අනුව $\forall \mathbb{Z}^+$ සඳහා සත්‍ය වේ

③ ගණිත අභ්‍යුහන ගැටළු

Note:

① $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{S_n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ බව

LHS

n=1;

S_1

$\frac{1}{2}$

RHS

n=1;

$1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා,

$\underbrace{1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)}_{S_n} = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව

n=1 විට.

LHS $S_1 = 1.2.3$

RHS $\frac{1}{4}(2)(3)(4)$

$1.2.3$

LHS = RHS

∴ n=1 විට සත්‍ය වේ.

n=p විට, සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු

$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + p(p+1)(p+2)$

$= \frac{p}{4}(p+1)(p+2)(p+3)$ —①

n=p+1 විට $\rightarrow \left\{ \frac{(p+1)}{4}(p+1+1)(p+1+2)(p+1+3) \right\}$

$\underbrace{1.2.3 + 2.3.4 + \dots + p(p+1)(p+2)}_{①\text{න්}}$

$+ (p+1)(p+2)(p+3)$

$= \frac{p}{4}(p+1)(p+2)(p+3) + (p+1)(p+2)(p+3)$

$= (p+1)(p+2)(p+3)\left[\frac{p+4}{4}\right]$

$= \frac{(p+1)}{4}(p+1+1)(p+1+2)(p+1+3)$

= RHS

∴ n=p+1 විට සත්‍ය වේ.

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව

$\mathbb{Z}^+$ සඳහා සත්‍ය වේ.

සලකන්න ① ශ්‍රේණිය = S_n ලෙස ගනිමු.

ශ්‍රේණිය S_n [illegible],

n=1 විට

S_1 = පළමු පදය

n=2 විට

S_2 = පළමු පදය + දෙවන පදය

n=p විට

S_p = පළමු p පද එකතුව

n=p+1 විට

S_{p+1} = පළමු (p+1) පද එකතුව

@ සාධනය කළ

n=1, n=p, n=p+1 [illegible] ... [illegible], ... $n=p+1$ දී ... [illegible]

• Hypertext Preprocessor

PHP

② $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\underbrace{\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2-1}}_{S_n} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$$

$n=1$ සඳහා

LHS $S_1 = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$

RHS $\frac{3}{4}-\frac{1}{2.2}-\frac{1}{2.3}$

$\frac{18-6-4}{4\times 6}$

$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

LHS = RHS

$\therefore n=1$ දී සත්‍යයි

$n=p$ දී සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{(p+1)^2-1} = \frac{3}{4}-\frac{1}{2(p+1)}-\frac{1}{2(p+2)} \quad ①$$

$n=p+1$ දී $\left\{\frac{3}{4}-\frac{1}{2(p+1+1)}-\frac{1}{2(p+1+2)}\right\}$

$$\underbrace{\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{3^2-1}+\dots+\frac{1}{(p+1)^2-1}}_{=①}+\frac{1}{(p+2)^2-1}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(p+1)}-\frac{1}{2(p+2)}+\frac{1}{(p+1)(p+3)}$$

? භින්නවලට වෙන් කරන්න

$$\frac{3}{4}-\cancel{\frac{1}{2(p+1)}}-\frac{1}{2(p+2)}+\cancel{\frac{1/2}{(p+1)}}+\frac{1/2}{(p+3)}$$

$p=-1 \quad p=-3$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(p+2)}-\frac{1}{2(p+3)}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2(p+1+1)}-\frac{1}{2(p+1+2)}$$

RHS

$\therefore n=p+1$ දී සත්‍යයි

$\therefore$ ග.ආ.මූ. අනුව සියලු $\mathbb{Z}^+$ සඳහා සත්‍ය වේ

④ Σ අංකනය භාවිත

Note

① $T_1+T_2+\dots+T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$

② ශ්‍රේණියක සාධාරණ පදය $= r$ වන පදය U_r නම්,

$S_n = u_1+u_2+\dots+u_n$

$$\boxed{S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r}$$

① $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{(n+1)} \text{ බව}$$

$= U_r$ ලෙස ගනිමු.

$n=1$ දී

LHS $\sum_{r=1}^{1} U_r = \frac{1}{2}$ RHS $\frac{1}{2}$

LHS = RHS

$\therefore n=1$ දී සත්‍ය වේ

$n=p$ දී සත්‍ය වේ යැයි උපකල්පනය කරමු

$$\sum_{r=1}^{p} u_r = \frac{p}{(p+1)}$$

$$\sum_{r=1}^{p} U_r = \frac{p}{(p+1)} \quad ①$$

$n=p+1$ දී $\left\{\frac{(p+1)}{(p+1+1)}\right\}$

$$\sum_{r=1}^{p+1} u_r = \sum_{r=1}^{p} u_r + u_{p+1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} u_r + \boxed{u_{p+1}}$$

$$① = \frac{p}{(p+1)} + \cancel{\frac{(p+1)}{(p+2)}}$$

$2p^2+4p+1$

$$= \cancel{\frac{p^2+2p+p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)}}$$

$$= \frac{p}{(p+1)} + \boxed{\frac{1}{(p+1)(p+2)}}$$

$$= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{(p+1)^2}{\cancel{(p+1)}(p+2)}$$

$$= \frac{(p+1)}{(p+1+1)}$$

$\therefore n=p+1$ දී සත්‍යයි

$\therefore$ ගණිත ආ.මූ. අනුව $\mathbb{Z}^+$ සඳහා සත්‍ය වේ

පියවර

① Σ ලකුණ තුල $=u_r$ හඳුනා ගන්න.

$$\sum_{r=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{r(r+1)}}_{=u_r}$$

$$u_r = \frac{1}{r(r+1)}$$

② ප්‍රත්‍යක්ෂ සාධනය

පෙන්වන්න $\sum_{r=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{r(r+1)}}_{=u_r} = \frac{n}{(n+1)}$ බව

$$u_r = \frac{1}{r(r+1)} \quad \text{—①}$$

n = 1 විට

$$\sum_{r=1}^{1} u_r = \frac{1}{2}$$

n = p විට

$$\sum_{r=1}^{p} u_r = \frac{p}{(p+1)} \quad \text{—②}$$

n = p + 1 විට

$$\sum_{r=1}^{p+1} u_r = \sum_{r=1}^{p} u_r + \boxed{u_{p+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{p}{(p+1)}}_{\text{② න්.}} + \underbrace{\frac{1}{(p+1)(p+2)}}_{\text{① න්.}}$$

ධන n සඳහා ගණිත අභ්‍යුහනයෙන්

$\sum_{r=1}^{n} \underbrace{(2r-1)}_{=u_r} = n^2$ බව පෙන්වන්න

$$u_r = 2r-1$$

n = 1

LHS: $\sum_{r=1}^{1} u_r = 2-1 = 1$

RHS: $1^2 = 1$

LHS = RHS

∴ n = 1 විට සත්‍යයි

n = p විට

$$\sum_{r=1}^{p} u_r = p^2 \quad \text{—①}$$

n = p + 1 විට $\{(p+1)^2\}$

$$\sum_{r=1}^{p+1} u_r = \sum_{r=1}^{p} u_r + u_{p+1}$$

$$= p^2 + 2(p+1) - 1$$

$$= p^2 + 2p + 1$$

$$= (p+1)^2$$

∴ n = p + 1 විට සත්‍යවේ

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු + ධන නිඛිල සඳහා සත්‍ය වේ.

⑤ ගණිත අභ්‍යුහනය

① $y = \frac{1}{(x+1)}$ $\quad (x \neq -1)$

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$$ බව.

n = 1 විට

LHS

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^1 y}{dx^1} = \frac{d\left[\frac{1}{(x+1)}\right]}{dx} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

RHS

$$\frac{(-1)^1 \cdot 1!}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

LHS = RHS

∴ n = 1 විට සත්‍යයි

n = p විට සත්‍ය යැයි සිතමු.

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{(-1)^p \cdot p!}{(x+1)^{p+1}} \quad -①$$

n = p+1 විට

$$\left\{ \frac{(-1)^{p+1} \cdot (p+1)!}{(x+1)^{p+2}} \right\}$$

$$\frac{d^{(p+1)} y}{dx^{(p+1)}} = \frac{d\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{(-1)^p \cdot p!}{(x+1)^{p+1}}\right]}{dx}$$

$$= \frac{d\left[\frac{(-1)^p \cdot p!}{(x+1)^{p+1}}\right]}{dx}$$

$$= (-1)^p \cdot p! \; \frac{d\left[(x+1)^{-(p+1)}\right]}{dx}$$

$$= (-1)^p \cdot p! \, (-1)(p+1) \cdot (x+1)^{(-p-1-1)}$$

$$= \frac{(-1)^p \cdot p! \, (-1)(p+1) \cdot 1}{(x+1)^{(p+2)}}$$

$$= \frac{(-1)^p \cdot p! \, (-1)(p+1)}{(x+1)^{p+2}}$$

$$= \frac{(-1)^p (-1) \cdot (p+1)!}{(x+1)^{p+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{p+1} (p+1)!}{(x+1)^{p+2}}$$

∴ n = p+1 විටද සත්‍ය වේ.

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව $\mathbb{Z}^+$ සඳහා සත්‍ය වේ

සටහන්

① n = 1 විට. $\frac{dy}{dx}$ වේ. ∴ $\frac{d[y]}{dx}$
y අවකලනය කිරීම නිසා

② n = p සත්‍ය යැයි උපකල්පනය

③ n = p+1

$$\frac{d^{(p+1)} y}{dx^{(p+1)}} = \frac{d^1\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right]}{dx^1}$$

① න්.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\frac{d^n}{dx^n}[\sin ax] = a^n \sin\left[ax + \frac{n\pi}{2}\right]$$ බව

n = 1 විට

LHS $\frac{d[\sin ax]}{dx}$

$= \cos ax . a$

RHS $a\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$

$= a \cos ax$

$= \cos ax\, a.$

LHS = RHS

∴ n = 1 විට සත්‍යයි

n = p විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\frac{d^p[\sin ax]}{dx^p} = a^p \sin\left[ax + \frac{p\pi}{2}\right] \quad -①$$

n = p + 1 විට

$$\frac{d^{p+1}[\sin ax]}{dx^{p+1}}$$

$$= \frac{d\left[\frac{d^p[\sin ax]}{dx^p}\right]}{dx}$$

$$= \frac{d\left[a^p \sin\left(ax + \frac{p\pi}{2}\right)\right]}{dx}$$

$$= a^p \cos\left(ax + \frac{p\pi}{2}\right) . [a.1 + 0]$$

$$= a^{(p+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{p\pi}{2} + ax\right)$$

$$= a^{(p+1)} \sin\left(ax + (p+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

∴ n = p + 1 විට සත්‍යයි

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු (+) නිඛිල සඳහා සත්‍යයි

(6) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය

(i) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ අනුක්‍රමයේ x_n, x_{n+1} පද අතර සම්බන්ධය $x_{n+1} + 4x_n = 0$ මගින් ලබා දේ. x අනුක්‍රමය ධන නිඛිල n සඳහා $x_n = 3(-4)^{n-1}$ බව පෙන්වන්න $x_1 = 3$ නම්.

~~n = 1~~

~~LHS x_1~~

~~$x_{1+1} + 4x_1 = 0$~~

~~$x_2 + 4x_1 = 0$~~

~~$x_3 + 4x_2 = 0$~~

$x_{n+1} + 4x_n = 0 \quad -①$

$x_1 = 3 \quad -②$

n = 1

LHS x_1

3

RHS $3(-4)^0$

3

LHS = RHS

∴ n = 1 විට සත්‍යයි

n = p විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු

$x_p = 3(-4)^{p-1} \quad -②$

n = p + 1 $\{3(-4)^p$

x_{p+1}

$x_{p+1} + 4x_p = 0$ ① න්

$x_{p+1} = -4\left[3(-4)^{p-1}\right]$ ② න්

$= 3(-4)^p$

∴ n = p + 1 විට සත්‍යයි.

∴ ග. අ. මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිල සඳහා සත්‍යයි

② $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\frac{d^n[\sin ax]}{dx^n} = a^n \sin\left[ax + \frac{n\pi}{2}\right]$$ බව

$n=1$ විට

LHS

$$\frac{d[\sin ax]}{dx}$$

$= \cos ax \cdot a$

RHS

$$a \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$= a \cos ax$

$= \cos ax \, a.$

LHS = RHS

$\therefore n=1$ විට සත්‍යය වේ

$n=p$ විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$$\frac{d^p[\sin ax]}{dx^p} = a^p \sin\left[ax + \frac{p\pi}{2}\right] \quad \text{—①}$$

$n=p+1$ විට

$$\frac{d^{p+1}[\sin ax]}{dx^{p+1}}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^p[\sin ax]}{dx^p}\right]$$

$$= \frac{d\left[a^p \sin\left(ax + \frac{p\pi}{2}\right)\right]}{dx}$$

$= a^p \cos\left(ax + \frac{p\pi}{2}\right) \cdot [a.1 + 0]$

$= a^{(p+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{p\pi}{2} + ax\right]$

$= a^{(p+1)} \sin\left(ax + (p+1)\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore n = p+1$ විට සත්‍යය වේ

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු $(+)$ නිඛිල සඳහා සත්‍යය වේ

⑥ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය

① $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයේ

x_n, x_{n+1} මගින් ප්‍රකාශ වන සම්බන්ධය $x_{n+1} + 4x_n = 0$

ලෙස දී ඇත.

x සියලුම ධන නිඛිල n සඳහා

$x_n = 3(-4)^{n-1}$ බව පෙන්වන්න

$x_1 = 3$ කි.

$n=1$

LHS x_1

~~$x_{1+1} + 4x_1 = 0$~~

~~$x_2 + 4x_1 = 0$~~

~~$x_3 + 4x_2 = 0$~~

$x_{n+1} + 4x_n = 0$ —①

$x_1 = 3$ —②

$n=1$

LHS x_1

3

RHS $3(-4)^0$

3

LHS = RHS

$\therefore n=1$ විට සත්‍යය වේ

$n=p$ විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු

$x_p = 3(-4)^{p-1}$ —③

$n=p+1$ $\{3(-4)^p$

x_{p+1}

$x_{p+1} + 4x_p = 0$ ① න්

$x_{p+1} = -4\left[3(-4)^{p-1}\right]$ ③ න්

$= 3(-4)^p$

$\therefore n=p+1$ විට සත්‍යය වේ,

$\therefore$ ග. අ. මූලධර්මය අනුව සියලුම

සඳහා සත්‍යය වේ

2 1/4

② $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

දෙනු ලබන තාත්වික සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයකි

x_n, x_{n+1}, x_{n+2} ඕනෑම අනුයාත පද සලකමු.

$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0$

තෘප්ත කරයි

$x_1 = 0$ හා $x_2 = 12$ ලෙස දී ඇත්නම් සියලු n සඳහා $x_n = 3.4^n - 4.3^n$ බව සාධනය කරන්න

$x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0$ — ①

$x_1 = 0$ — ②

$x_2 = 12$ — ③

$x_3 - 7x_2 + 12x_1 = 0$

$x_3 - 7.12 + 12.0 = 0$

$x_3 = 94$ — ④

n=1

LHS x_1

0

RHS $3.4^1 - 4.3^1$

0

LHS = RHS

∴ n=1 විට සත්‍ය වේ

n=p විට සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

$x_p = 34^p - 43^p$ — ⑤

n = p+1 $\{3.4^{p+1} - 4.3^{p+1}]$

x_{p+1}

* ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයේ අනුයාත පියවර 3 ක් ඇත. එනම්.

n=1, n=2 සඳහා සත්‍යයි

n=p+1, n=p සඳහා උපකල්පනය

n=p+2 සඳහා සත්‍ය කරයි

n=2 විට

LHS x_2

12

RHS $3.4^2 - 4.3^2$

$16\times3 - 4\times9$

12

LHS = RHS

∴ n=2 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

n=p+1 සඳහා ද සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු

$x_{p+1} = 34^{(p+1)} - 4.3^{(p+1)}$ — ⑥

n=p+2

$x_{p+2} - 7x_{p+1} + 12x_p = 0$

$x_{p+2} = 7\left[34^{(p+1)} - 43^{(p+1)}\right]$

$-12\left[34^p - 43^p\right]$

$\cancel{x_{p+2} = 3.(3}$

$= 7.\left[34^{(p+1)}\right] - 7\left(43^{(p+1)}\right)$

$- 4.3.3.4^p + 4.3.43^p$

$= 7\left(34^{p+1}\right) - 7\left(43^{p+1}\right)$

$- 3^2 4^{(p+1)} + 3^{(p+1)}.4^2$

$= 4.\left[34^{(p+1)}\right] - 3\left(4.3^{p+1}\right)$

$x_{p+2} = \left(3.4^{(p+2)}\right] - \left(4.3^{(p+2)}\right]$

∴ n=p+2 විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යය

∴ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු n සඳහා සත්‍ය වේ

② අසමානතා ආශ්‍රිත ගැටලු

Note:- ① $a>b$ බව පෙන්වීම

$a-b>0$ බව

② a, b ධන නම්

$\Rightarrow \frac{a}{b}>1$ නම්

$a>b$

$\Rightarrow \frac{a}{b}<1$ නම්

$b>a$

③ $a>b$ බව පෙන්වීම

$$\left.\begin{array}{l} a>c \\ c>b \end{array}\right\} a>b$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} p \in \mathbb{Z}^+ \\ p \geq 1 \\ p-1 \geq 0 \end{array}\right\}}$$

① $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $3^n > 2^n$ බව පෙන්වන්න

n=1 විට

LHS 3 RHS 2

$3>2$

LHS > RHS

∴ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

$n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු

$3^p > 2^p$ —①

$n=p+1$ විට $\{3^{p+1} > 2^{p+1}\}$

$\cancel{3^{p+1}}$ ①×3

$3^p \cdot 3 > 2^p \cdot 3$

$3^{(p+1)} > 3 \cdot 2^p$ —②

$3 \cdot 2^p > 2^{p+1}$ බව

$3 \cdot 2^p - 2^{p+1} > 0$ බව

LHS

$\underbrace{\underbrace{2^p}_{>0} \underbrace{(3-2)}_{>0}}_{>0}$

$3 \cdot 2^p - 2^{p+1} > 0$

$3 \cdot 2^p > 2^{p+1}$ —③

②, ③න්

$3^{p+1} > 2^{p+1}$

∴ $n=p+1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

∴ ග. ආ. මූලධර්මයෙන් සියලුම ධන නිඛිල සඳහා සත්‍ය වේ

② සියලුම ධන නිඛිල n සඳහා
$8(n+1)! > 2^{n+1}(n+2)$
බව පෙන්වන්න

n=1 විට

LHS

$8(1+1)!$

$8 \cdot 2!$

$8 \cdot 1 \cdot 2$

16

RHS

$2^2(3)$

$4 \cdot 3$

12

$16>12$

LHS > RHS

∴ $n=1$ විට සත්‍ය වේ

$n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව උපකල්පනය කරමු

$8(p+1)! > 2^{p+1}(p+2)$ —①

$n=p+1$ විට $\{8(p+2)! > 2^{p+2}(p+3)\}$

①×(p+1)

$8(p+1)!(p+2) > 2^{p+1}(p+2)^2$

$8(p+2)! > 2^{p+1}(p+2)^2$ —②

$2^{p+1}(p+2)^2 > 2^{p+2}(p+3)$ බව

$2^{p+1}\left[(p+2)^2 - 2(p+3)\right] > 0$ බව

LHS

$2^{p+1}\left[p^2+4p+4-2p-6\right]$

$2^{p+1}\left[p^2+2p-2\right]$

$\cancel{2^{p+1}\left[(p+1)^2-4-2\right]}$

$\underbrace{\underbrace{2^{p+1}}_{>0}\left[\underbrace{\underbrace{p^2}_{\geq 0}+\underbrace{2(p-1)}_{p \geq 1,\ p-1 \geq 0}}_{\geq 0}\right]}_{>0}$

$$2^{p+1}(p+2)^2 > 2^{p+2}(p+3) \quad — ③$$

①, ③ න්

$$8(p+2)! > 2^{p+1}(p+2)^2 > 2^{p+2}(p+3)$$

$$8(p+2)! > 2^{p+2}(p+3)$$

$\therefore n = p+1$ ට සත්‍යයි

$\therefore$ ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට
අනුව සියලු (+) නිඛිල සඳහා සත්‍යයි